线性微分和差分算子的收缩算法

张熠

数学机械化重点实验室
中国科学院数学与系统科学研究院

Krattenthaler 问题

如果 $(c_n)_{n\geq 0}$ 满足

$$\ell_r c_n = \ell_{r-1} c_{n-1} + \cdots + \ell_0 c_{n-r}$$

这里 $\ell_i \in \mathbb{Z}[n]$ 且 $\ell_r \neq 0$。

称 $(c_n)_{n\geq 0}$ 为在 $\mathbb{Z}$ 上的 *P*-递归序列。

猜想: 令 $(a_n)_{n\geq 0}$ 和 $(b_n)_{n\geq 0}$ 分别为在 $\mathbb{Z}$ 上的首项系数为 n 的 P-递归序列。那么 $(n!a_n b_n)_{n\geq 0}$ 也是在 $\mathbb{Z}$ 上的首项系数为 n 的 P-递归序列。

Krattenthaler 问题的例子

考虑:

$$\begin{aligned} na_n &= (31n-6)a_{n-1} + (49n-110)a_{n-2} + (9n-225)a_{n-3} \\ nb_n &= (4n+13)b_{n-1} + (69n-122)b_{n-2} + (36n-67)b_{n-3} \end{aligned}$$

$c_n := n!a_nb_n$ 满足的一个差分方程为:

$$\alpha(n)nc_n = (\cdots)c_{n-1} + \ldots + (\cdots)c_{n-9}$$

这里 $\alpha(n) \in \mathbb{Z}[n]$, $\deg_n(\alpha) = 20$。

Krattenthaler 问题的例子

考虑:

$$\begin{aligned} na_n &= (31n-6)a_{n-1}+(49n-110)a_{n-2}+(9n-225)a_{n-3} \\ nb_n &= (4n+13)b_{n-1}+(69n-122)b_{n-2}+(36n-67)b_{n-3} \end{aligned}$$

$c_n := n!a_nb_n$ 满足的一个差分方程为:

$$\alpha(n)nc_n = (\cdots)c_{n-1}+\ldots+(\cdots)c_{n-9}$$

这里 $\alpha(n)\in\mathbb{Z}[n]$, $\deg_n(\alpha)=20$。

已知的算法找到:

$$\beta nc_n = (\cdots)c_{n-1}+\ldots+(\cdots)c_{n-10}$$

这里 β 是 853-位的整数。

Krattenthaler 问题的例子

考虑:

$$\begin{aligned} na_n &= (31n-6)a_{n-1} + (49n-110)a_{n-2} + (9n-225)a_{n-3} \\ nb_n &= (4n+13)b_{n-1} + (69n-122)b_{n-2} + (36n-67)b_{n-3} \end{aligned}$$

$c_n := n!a_nb_n$ 满足的一个差分方程为:

$$\alpha(n)nc_n = (\cdots)c_{n-1} + \ldots + (\cdots)c_{n-9}$$

这里 $\alpha(n) \in \mathbb{Z}[n]$, $\deg_n(\alpha) = 20$。

已知的算法找到:

$$\beta nc_n = (\cdots)c_{n-1} + \ldots + (\cdots)c_{n-10}$$

这里 β 是 853-位的整数。

我们的算法找到:

$$1nc_n = (\cdots)c_{n-1} + \ldots + (\cdots)c_{n-14}$$

Ore 代数 (差分情形)

考虑:

$$f(n+1)-(n+1)f(n)=0.$$

利用 $\mathbb{Z}[n][\partial]$ 其中 $\partial \circ f(n) := f(n+1)$, $n \circ f(n) := n \cdot f(n)$

$$[\partial-(n+1)] \circ f = 0.$$

- 设 $L \in \mathbb{Z}[n][\partial]$。若 $L \circ f = 0$，则称 L 为 f 的 差分算子。
- 设 $L = \ell_r \partial^r + \ldots + \ell_1 \partial + \ell_0$
  称 $\deg_\partial(L) = r$ 为 L 的 阶， $\mathrm{lc}_\partial(L) = \ell_r$ 为 L 的 首项系数
- 设 $T \in \mathbb{Z}[n][\partial]$。如果 $T = PL$，那么 T 被称为 L 的 左倍式，这里 $P \in \mathbb{Q}(n)[\partial]$

研究动机

例 1 考虑 $u(n)$ 的差分算子:

$$L = (1+16n)^2\partial^2 - (224+512n)\partial - (1+n)(17+16n)^2$$

问题：假设 $u(0), u(1) \in \mathbb{Z}$，对每个 $n \in \mathbb{N}$ 是否有$u(n) \in \mathbb{Z}$?

研究动机

例 1 考虑 $u(n)$ 的差分算子:

$$L = (1+16n)^2\partial^2 - (224+512n)\partial - (1+n)(17+16n)^2$$

问题：假设 $u(0), u(1) \in \mathbb{Z}$，对每个 $n \in \mathbb{N}$ 是否有$u(n) \in \mathbb{Z}$?

(Abramov, Bakatou, van Hoeij) 找到 L 的左倍式：

$$T := (\ldots)L = 64\partial^3 + \text{ 低阶项 } \in \mathbb{Z}[n][\partial]$$

研究动机

例 1 考虑 $u(n)$ 的差分算子:

$$L = (1+16n)^2\partial^2 - (224+512n)\partial - (1+n)(17+16n)^2$$

问题：假设 $u(0), u(1) \in \mathbb{Z}$，对每个 $n \in \mathbb{N}$ 是否有$u(n) \in \mathbb{Z}$?

(Abramov, Bakatou, van Hoeij) 找到 L 的左倍式：

$$T := (\ldots)L = 64\partial^3 + \text{ 低阶项} \in \mathbb{Z}[n][\partial]$$

我们的算法找到 L 的另一左倍式:

$$\widetilde{T} := 1\partial^3 + \text{ 低阶项} \in \mathbb{Z}[n][\partial]$$

回答: 是，$u(n)$ 为整数序列。

奇点消去

给定 $L \in \mathbb{Z}[n][\partial]$, $p \mid \mathrm{lc}_{\partial}(L)$。

设 $T \in \mathbb{Z}[n][\partial]$ 且 $\mathrm{lc}_{\partial}(T) = a \cdot g$，其中 $a \in \mathbb{Z}$，g 是本原的。
若 T 满足：

- T 为 L 的左倍式
- $g \mid \frac{1}{p} \mathrm{lc}_{\partial}(L)$

则称 T 为 L 的 p-消尽算子

奇点消去

给定 $L \in \mathbb{Z}[n][\partial]$, $p \mid \operatorname{lc}_\partial(L)$。

设 $T \in \mathbb{Z}[n][\partial]$ 且 $\operatorname{lc}_\partial(T) = a \cdot g$，其中 $a \in \mathbb{Z}$，g 是本原的。
若 T 满足:

- T 为 L 的左倍式
- $g \mid \frac{1}{p} \operatorname{lc}_\partial(L)$

则称 T 为 L 的 p-消尽算子

注：a 称为 T 首项系数的容度，记作 $\mathrm{c}(T)$

奇点消去

设 T 为 p-消尽算子，$\mathrm{lc}_\partial(T) = a \cdot g$，其中 $a \in \mathbb{Z}$，g 是本原的。

- 若

$$\deg(g) = \min\{\deg(\mathrm{lc}_\partial(Q)) \mid Q \text{ 为 p-消尽算子}\}$$

则称 T 为 L 的 奇点消尽算子

奇点消去

设 T 为 p-消尽算子，$\mathrm{lc}_\partial(T) = a \cdot g$，其中 $a \in \mathbb{Z}$，g 是本原的。

- 若
  $$\deg(g) = \min\{\deg(\mathrm{lc}_\partial(Q)) \mid Q \text{ 为 p-消尽算子}\}$$
  则称 T 为 L 的 奇点消尽算子
- 若 T 为奇点消尽算子，且
  $$a = \min\{\mathrm{c}(Q) \mid Q \text{ 为奇点消尽算子}\}$$
  则称 T 为 L 的 完全奇点消尽算子

奇点消去

例 1 (续) 考虑:

$$L = (1+16n)^2\partial^2 - (224+512n)\partial - (1+n)(17+16n)^2$$

(Abramov, Bakatou, van Hoeij) 找到 L 的左倍式:

$$T = (\ldots)L = 64\partial^3 + \text{ 低阶项} \in \mathbb{Z}[n][\partial]$$

找到 L 的另一左倍式:

$$\widetilde{T} = 1\partial^3 + \text{ 低阶项} \in \mathbb{Z}[n][\partial]$$

T 和 $\widetilde{T}$ 分别为 L 的奇点消尽算子和完全奇点消尽算子。

收缩理想

给定 $L \in \mathbb{Z}[n][\partial]$。

考虑 $\langle L \rangle := \mathbb{Q}(n)[\partial]L$, 称 $\langle L \rangle$ 关于 $\mathbb{Z}[n][\partial]$ 的 收缩理想 为

$$\mathrm{Cont}(L) := \langle L \rangle \cap \mathbb{Z}[n][\partial]$$

收缩理想

给定 $L \in \mathbb{Z}[n][\partial]$。

考虑 $\langle L \rangle := \mathbb{Q}(n)[\partial]L$, 称 $\langle L \rangle$ 关于 $\mathbb{Z}[n][\partial]$ 的 收缩理想 为

$$\mathrm{Cont}(L) := \langle L \rangle \cap \mathbb{Z}[n][\partial]$$

- $\mathrm{Cont}(L)$ 为 $\mathbb{Z}[n][\partial]$ 的有限生成左理想。
- L 的奇点消尽算子属于 $\mathrm{Cont}(L)$。
- $\mathrm{Cont}(L)$ 包含 $\mathbb{Z}[n][\partial]L$，但一般是真包含。

收缩理想

目标：计算 Cont(L) 的一组 $\mathbb{Z}[n][\partial]$-基。

收缩理想

目标：计算 Cont(L) 的一组 $\mathbb{Z}[n][\partial]$-基。

例 1 (续) 考虑:

$$L = (1+16n)^2\partial^2 - (224+512n)\partial - (1+n)(17+16n)^2$$

Cont(L) 由 $\{L, \widetilde{T}\}$ 生成。

奇点消去与收缩理想

给定 $L \in \mathbb{Z}[n][\partial]$，$\deg_{\partial}(L) = r$。

设 $k \geq r$，称

$$M_k := \{T \mid T \in \mathrm{Cont}(L),\ \deg_{\partial}(T) \leq k\}$$

为 $\mathrm{Cont}(L)$ 的 k 阶子模。

奇点消去与收缩理想

给定 $L \in \mathbb{Z}[n][\partial]$，$\deg_\partial(L) = r$。

设 $k \geq r$，称

$$M_k := \{T \mid T \in \mathrm{Cont}(L),\ \deg_\partial(T) \leq k\}$$

为 $\mathrm{Cont}(L)$ 的 k 阶子模。

设 I 为 $\mathbb{Z}[n][\partial]$ 的左理想，$a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$，称

$$I : a^\infty := \{T \in \mathbb{Z}[n][\partial] \mid \text{存在 } k \in \mathbb{N},\ \text{使得 } a^k T \in I\}$$

为 I 关于 a 的饱和理想。

奇点消去与收缩理想

给定 $L \in \mathbb{Z}[n][\partial]$，$\deg_\partial(L) = r$。

设 $k \geq r$，称

$$M_k := \{T \mid T \in \mathrm{Cont}(L),\ \deg_\partial(T) \leq k\}$$

为 $\mathrm{Cont}(L)$ 的 k 阶子模。

设 I 为 $\mathbb{Z}[n][\partial]$ 的左理想，$a \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$，称

$$I : a^\infty := \{T \in \mathbb{Z}[n][\partial] \mid \text{ 存在 } k \in \mathbb{N},\ \text{使得 } a^k T \in I\}$$

为 I 关于 a 的饱和理想。

定理 1 (主要结果 1) 设 T 是 L 的奇点消尽算子，$\mathrm{lc}_\partial(T) = a \cdot g$，其中 $a \in \mathbb{Z}$ 且 g 是本原的。若 $k = \deg_\partial(T)$，则

$$\mathrm{Cont}(L) = (\mathbb{Z}[x][\partial] \cdot M_k) : a^\infty$$

奇点消尽算子阶的上界

给定 $L \in \mathbb{Z}[n][\partial]$。

(Chen, Jaroschek, Kauers, Singer) 设 $p \mid \mathrm{lc}_\partial(L)$，$p$ 不可约

- 若 p 是可消去的，则可以 计算 出上界 k，使得存在 L 的阶为 k 的 p-消尽算子。
- 利用 Euclidean 算法，可以 计算出 奇点消尽算子阶的上界。

确定收缩理想的 k 阶子模

给定 $L \in \mathbb{Z}[n][\partial]$，$\deg_{\partial}(L) = r$。

问题: 给定 $k \geq r$, 求 $\mathrm{Cont}(L)$ 的 k 阶子模 M_k 的一组生成集?

确定收缩理想的 k 阶子模

给定 $L \in \mathbb{Z}[n][\partial]$，$\deg_\partial(L) = r$。

问题: 给定 $k \geq r$, 求 $\mathrm{Cont}(L)$ 的 k 阶子模 M_k 的一组生成集?

设 $V := \{v_1, \ldots, v_m\}$ 为 $\mathbb{Z}[n]^r$ 的有限子集。
称 $\{(a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{Z}[n]^m \mid \sum_{i=1}^m a_i \cdot v_i = 0\}$ 为 V 的 **合冲模**。

确定收缩理想的 k 阶子模

给定 $L \in \mathbb{Z}[n][\partial]$，$\deg_\partial(L) = r$。

问题: 给定 $k \geq r$, 求 $\mathrm{Cont}(L)$ 的 k 阶子模 M_k 的一组生成集?

设 $V := \{v_1, \ldots, v_m\}$ 为 $\mathbb{Z}[n]^r$ 的有限子集。
称 $\{(a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{Z}[n]^m \mid \sum_{i=1}^m a_i \cdot v_i = 0\}$ 为 V 的 合冲模。

定理 2 给定 $k \geq r$, 可以 计算出 有限集 $V \subseteq \mathbb{Z}[n]^{k+1}$ 使得 M_k 作为 $\mathbb{Z}[n]$-模同构于 V 的合冲模。

计算奇点消尽算子

给定 $L \in \mathbb{Z}[n][\partial]$，$\deg_{\partial}(L) = r$。

回忆：设 $T \in \mathrm{Cont}(L)$，$\mathrm{lc}_{\partial}(T) = a \cdot g$，其中 $a \in \mathbb{Z}$，g 是本原的。若

$$\deg(g) = \min\{\deg(\mathrm{lc}_{\partial}(Q)) \mid Q \text{ 为 p-消尽算子}\}$$

则称 T 为 L 的 奇点消尽算子

计算奇点消尽算子

给定 $L \in \mathbb{Z}[n][\partial]$，$\deg_{\partial}(L) = r$。

回忆：设 $T \in \mathrm{Cont}(L)$，$\mathrm{lc}_{\partial}(T) = a \cdot g$，其中 $a \in \mathbb{Z}$，g 是本原的。若

$$\deg(g) = \min\{\deg(\mathrm{lc}_{\partial}(Q)) \mid Q \text{ 为 p-消尽算子}\}$$

则称 T 为 L 的 奇点消尽算子

问题: 设 k 为奇点消尽算子阶的上界，求 L 的奇点消尽算子?

计算奇点消尽算子

给定 $L \in \mathbb{Z}[n][\partial]$，$\deg_\partial(L) = r$。

回忆：设 $T \in \mathrm{Cont}(L)$，$\mathrm{lc}_\partial(T) = a \cdot g$，其中 $a \in \mathbb{Z}$，g 是本原的。若

$$\deg(g) = \min\{\deg(\mathrm{lc}_\partial(Q)) \mid Q \text{ 为 p-消尽算子}\}$$

则称 T 为 L 的 奇点消尽算子

问题: 设 k 为奇点消尽算子阶的上界，求 L 的奇点消尽算子?

设 $k \geq r$，称

$$I_k := \left\{[\partial^k]P \mid P \in M_k\right\} \cup \{0\},$$

为 $\mathrm{Cont}(L)$ 的 k 阶系数理想，这里 $[\partial^k]P$ 表示 P 中 ∂^k 的系数。

计算奇点消尽算子

命题 若 $\{B_1, \ldots, B_t\}$ 为 M_k 的一组生成集，则

$$I_k = \langle [\partial^k] B_1, \ldots, [\partial^k] B_t \rangle$$

计算奇点消尽算子

命题 若 $\{B_1, \ldots, B_t\}$ 为 M_k 的一组生成集，则

$$I_k = \langle [\partial^k]B_1, \ldots, [\partial^k]B_t \rangle$$

定理 3 若 s 是 I_k 中次数最小的非零元素，则 M_k 中以 s 为首项系数的算子 S 是奇点消尽算子。

计算奇点消尽算子

命题 若 $\{B_1, \ldots, B_t\}$ 为 M_k 的一组生成集，则

$$I_k = \langle [\partial^k] B_1, \ldots, [\partial^k] B_t \rangle$$

定理 3 若 s 是 I_k 中次数最小的非零元素，则 M_k 中以 s 为首项系数的算子 S 是奇点消尽算子。

注：利用 $\mathbb{Q}[n]$ 上的扩展 Euclidean 算法，可以 计算出 上述以 s 为首项系数的算子 S。

确定收缩理想的基

算法 1：给定 $L \in \mathbb{Z}[n][\partial]$，计算 $\mathrm{Cont}(L)$ 的一组基底。

(1) 求出奇点消尽算子阶的上界 k。

(2) 计算 M_k 作为 $\mathbb{Z}[n]$-模的一组生成集。

(3) 计算 k 阶奇点消尽算子 T，设 a 是 $\mathrm{lc}_\partial(T)$ 的容度。

(4) 利用 Gröbner 基，计算 $(\mathbb{Z}[n][\partial] \cdot M_k) : a^\infty$ 的一组基底。

确定收缩理想的基

例 1 (续) 考虑:

$$L = (1+16n)^2\partial^2 - (224+512n)\partial - (1+n)(17+16n)^2$$

(1) 奇点消尽算子阶的上界为 3。

(2) M_3 由 $\{L, \widetilde{T}\}$ 生成。

(3) 由于 $\mathrm{lc}_{\partial}(\widetilde{T}) = 1$， $\widetilde{T}$ 为奇点消尽算子。

(4) $\mathrm{Cont}(L) = (\mathbb{Z}[n][\partial]\cdot\{L,\widetilde{T}\}) : 1^{\infty} = \mathbb{Z}[n][\partial]\cdot\{L,\widetilde{T}\}$

计算完全奇点消去算子

给定 $L \in \mathbb{Z}[n][\partial]$，$\deg_\partial(L) = r$。

回忆：设 T 为奇点消尽算子，$\mathrm{lc}_\partial(T) = a \cdot g$，其中 $a \in \mathbb{Z}$，g 是本原的。若

$$a = \min\{\mathrm{c}(Q) \mid Q \text{ 为奇点消尽算子}\}$$

则称 T 为 L 的 完全奇点消尽算子

计算完全奇点消去算子

给定 $L \in \mathbb{Z}[n][\partial]$，$\deg_\partial(L) = r$。

回忆：设 T 为奇点消尽算子，$\mathrm{lc}_\partial(T) = a \cdot g$，其中 $a \in \mathbb{Z}$，g 是本原的。若

$$a = \min\{\mathrm{c}(Q) \mid Q \text{ 为奇点消尽算子}\}$$

则称 T 为 L 的 完全奇点消尽算子

问题：求 L 的一个完全奇点消尽算子?

计算完全奇点消去算子

定理 4 设 $\mathrm{Cont}(L) = \mathbb{Z}[n][\partial] \cdot M_k$ 且 $\mathbf{G}$ 是 I_k 的一组 Gröbner 基。令 f 是 $\mathbf{G}$ 中次数最低的元素。若 $F \in \mathrm{Cont}(L)$ 且 $\mathrm{lc}_\partial(F) = f$，则 F 是 L 的完全奇点消尽算子。

计算完全奇点消去算子

定理 4 设 $\mathrm{Cont}(L) = \mathbb{Z}[n][\partial] \cdot M_k$ 且 $\mathbf{G}$ 是 I_k 的一组 Gröbner 基。令 f 是 $\mathbf{G}$ 中次数最低的元素。若 $F \in \mathrm{Cont}(L)$ 且 $\mathrm{lc}_\partial(F) = f$，则 F 是 L 的完全奇点消尽算子。

算法 2 (主要结果 2)**:** 给定 $L \in \mathbb{Z}[n][\partial]$，计算 L 的完全奇点消尽算子。

(1) 由算法 1，$\mathrm{Cont}(L) = \mathbb{Z}[n][\partial] \cdot M_k$。

(2) 计算 I_k 的一组 Gröbner 基 $\mathbf{G}$。

(3) 设 f 是 $\mathbf{G}$ 中次数最低的元素。回溯第 2 步，找到 $F \in \mathrm{Cont}(L)$ 使得 $\mathrm{lc}_\partial(F) = f$。

计算完全奇点消去算子

例 2：考虑 (Kauers, Krattenthaler, Müller)：

$$L = (n+10)(n^6 + 47n^5 + \cdots + 211696)\partial^{10} + \text{低阶项}$$

(1) 由算法 1，$\mathrm{Cont}(L) = \mathbb{Z}[n][\partial] \cdot M_{14}$

(2) $I_{14} = \langle n + 14 \rangle$

(3) 找到 L 的完全奇点消尽算子 T，$\mathrm{lc}_{\partial}(T) = n + 14$

计算完全奇点消去算子

例 2：考虑 (Kauers, Krattenthaler, Müller)：

$$L = (n+10)(n^6 + 47n^5 + \cdots + 211696)\partial^{10} + \text{低阶项}$$

(1) 由算法 1，$\mathrm{Cont}(L) = \mathbb{Z}[n][\partial] \cdot M_{14}$

(2) $I_{14} = \langle n+14 \rangle$

(3) 找到 L 的完全奇点消尽算子 T，$\mathrm{lc}_{\partial}(T) = n+14$

注：并不存在阶严格小于 14 的完全奇点消尽算子，因为

$$\begin{aligned}
\partial^{-11} \circ I_{11} &= \langle 11104n, 4n(n-466), n(n^2-34n+1336) \rangle, \\
\partial^{-12} \circ I_{12} &= \langle 4n, n(n-24) \rangle, \\
\partial^{-13} \circ I_{13} &= \langle 2n, n(n-26) \rangle.
\end{aligned}$$

计算完全奇点消去算子

例 3：考虑:

$$\begin{aligned} na_n &= (31n-6)a_{n-1} + (49n-110)a_{n-2} + (9n-225)a_{n-3} \\ nb_n &= (4n+13)b_{n-1} + (69n-122)b_{n-2} + (36n-67)b_{n-3} \end{aligned}$$

$c_n := n!a_nb_n$ 有阶为 9 的差分算子 L 满足 $\mathrm{lc}_\partial(L) = (n+9)\alpha(n)$, $\alpha(n) \in \mathbb{Z}[n]$。

计算完全奇点消去算子

例 3：考虑:

$$\begin{aligned} na_n &= (31n-6)a_{n-1} + (49n-110)a_{n-2} + (9n-225)a_{n-3} \\ nb_n &= (4n+13)b_{n-1} + (69n-122)b_{n-2} + (36n-67)b_{n-3} \end{aligned}$$

$c_n := n!a_nb_n$ 有阶为 9 的差分算子 L 满足 $\mathrm{lc}_\partial(L) = (n+9)\alpha(n)$, $\alpha(n) \in \mathbb{Z}[n]$。

(1) 由算法 1，$\mathrm{Cont}(L) = \mathbb{Z}[n][\partial] \cdot M_{14}$

(2) $I_{14} = \langle n+14 \rangle$

(3) 找到 L 的完全奇点消尽算子 T，$\mathrm{lc}_\partial(T) = n+14$

计算完全奇点消去算子

例 3：考虑:

$$\begin{aligned} na_n &= (31n-6)a_{n-1} + (49n-110)a_{n-2} + (9n-225)a_{n-3} \\ nb_n &= (4n+13)b_{n-1} + (69n-122)b_{n-2} + (36n-67)b_{n-3} \end{aligned}$$

$c_n := n!a_nb_n$ 有阶为 9 的差分算子 L 满足 $\mathrm{lc}_\partial(L) = (n+9)\alpha(n)$, $\alpha(n) \in \mathbb{Z}[n]$。

(1) 由算法 1，$\mathrm{Cont}(L) = \mathbb{Z}[n][\partial] \cdot M_{14}$

(2) $I_{14} = \langle n+14 \rangle$

(3) 找到 L 的完全奇点消尽算子 T，$\mathrm{lc}_\partial(T) = n+14$

将 T 转化为 c_n 的差分方程

$$1nc_n = (\cdots)c_{n-1} + \ldots + (\cdots)c_{n-14}$$

首项系数容度的下界

设 $L \in \mathbb{Z}[n][\partial]$，表示为

$$L = a_r f_r(n)\partial^r + \cdots + a_1 f_1(n)\partial + a_0 f_0(n)$$

这里 $a_i \in \mathbb{Z}$, $f_i(n)$ 是本原的。若 $\gcd(a_0, \ldots, a_m) = 1$，则称 L 是 *R-本原的*.

首项系数容度的下界

设 $L \in \mathbb{Z}[n][\partial]$，表示为

$$L = a_r f_r(n)\partial^r + \cdots + a_1 f_1(n)\partial + a_0 f_0(n)$$

这里 $a_i \in \mathbb{Z}$, $f_i(n)$ 是本原的。若 $\gcd(a_0, \ldots, a_m) = 1$，则称 L 是 R-本原的.

定理 4 设L 是 R-本原的, $a \in \mathbb{Z}$, $a \mid \mathrm{lc}_\partial(L)$。那么对于 $Q \in \mathrm{Cont}(L) \setminus \{0\}$，$a \mid \mathrm{lc}_\partial(Q)$。

首项系数容度的下界

例 4：考虑阶为 2 的 R-本原算子 L，其首项系数为

$$3(n+2)(3n+4)(3n+5)(7n+3)\left(25n^2+21n+2\right)$$

且 L 是 $\binom{4n}{n}+3^n$ 的差分算子。根据 定理 4，对于 $Q \in \mathrm{Cont}(L) \setminus \{0\}$，$3 \mid \mathrm{lc}_\partial(Q)$。

Krattenthaler 问题

猜想: 令 $(a_n)_{n\geq 0}$ 和 $(b_n)_{n\geq 0}$ 分别为在 $\mathbb{Z}$ 上的首项系数为 n 的 P-递归序列。那么 $(n!a_nb_n)_{n\geq 0}$ 也是在 $\mathbb{Z}$ 上的首项系数为 n 的 P-递归序列。

Krattenthaler 问题

猜想: 令 $(a_n)_{n\geq 0}$ 和 $(b_n)_{n\geq 0}$ 分别为在 $\mathbb{Z}$ 上的首项系数为 n 的 P-递归序列。那么 $(n!a_nb_n)_{n\geq 0}$ 也是在 $\mathbb{Z}$ 上的首项系数为 n 的 P-递归序列。

考虑:

$$\begin{aligned} na_n &= \alpha_1 a_{n-1} + \ldots + \alpha_s a_{n-s} \\ nb_n &= \beta_1 b_{n-1} + \ldots + \beta_t b_{n-t} \end{aligned}$$

可以 **计算出** $c_n := n!a_nb_n$ 的差分算子 L。

Krattenthaler 问题

猜想: 令 $(a_n)_{n\geq 0}$ 和 $(b_n)_{n\geq 0}$ 分别为在 $\mathbb{Z}$ 上的首项系数为 n 的 P-递归序列。那么 $(n!a_nb_n)_{n\geq 0}$ 也是在 $\mathbb{Z}$ 上的首项系数为 n 的 P-递归序列。

考虑:

$$\begin{aligned} na_n &= \alpha_1 a_{n-1} + \ldots + \alpha_s a_{n-s} \\ nb_n &= \beta_1 b_{n-1} + \ldots + \beta_t b_{n-t} \end{aligned}$$

可以计算出 $c_n := n!a_nb_n$ 的差分算子 L。

想法: 计算 L 的完全奇点消尽算子。

Krattenthaler 问题

猜想: 令 $(a_n)_{n\geq 0}$ 和 $(b_n)_{n\geq 0}$ 分别为在 $\mathbb{Z}$ 上的首项系数为 n 的 P-递归序列。那么 $(n!a_nb_n)_{n\geq 0}$ 也是在 $\mathbb{Z}$ 上的首项系数为 n 的 P-递归序列。

考虑:

$$\begin{aligned} na_n &= \alpha_1 a_{n-1} + \ldots + \alpha_s a_{n-s} \\ nb_n &= \beta_1 b_{n-1} + \ldots + \beta_t b_{n-t} \end{aligned}$$

可以 计算出 $c_n := n!a_nb_n$ 的差分算子 L。

想法: 计算 L 的完全奇点消尽算子。

实验结果表明这个猜想可能是 正确的!

Krattenthaler 问题的部分证明

情形 1：考虑：

$$\begin{aligned} na_n &= \alpha a_{n-1} \\ nb_n &= \beta_1 b_{n-1} + \ldots + \beta_t b_{n-t} \end{aligned}$$

这里 $\alpha, \beta_i \in \mathbb{Z}[n]$。则 $c_n := n! a_n b_n$ 满足

$$nc_n = \gamma_1 c_{n-1} + \ldots + \gamma_t c_{n-t}$$

其中 $\gamma_i := \beta_i \prod_{j=0}^{i-1} \alpha(n-j)$。

Krattenthaler 问题的部分证明

情形 2：考虑：

$$\begin{aligned} na_n &= \alpha_1 a_{n-1} + \alpha_2 a_{n-2} \\ nb_n &= \beta_1 b_{n-1} + \beta_2 b_{n-2} + \beta_3 b_{n-3} \end{aligned}$$

这里 α_i, β_j 为未定元。则 $c_n := n! a_n b_n$ 满足

$$nc_n = \gamma_1 c_{n-1} + \ldots + \gamma_9 c_{n-9}$$

其中 $\gamma_i \in \mathbb{Z}[\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n]$。

结论与展望

结论

- 给出了确定收缩理想的算法
- 引入了完全奇点消尽算子并给出算法
- 序列整性判定及检验 Krattenthlater 问题的特例

结论与展望

结论

- 给出了确定收缩理想的算法
- 引入了完全奇点消尽算子并给出算法
- 序列整性判定及检验 Krattenthlater 问题的特例

展望

- Krattenthaler 问题的完全证明

结论与展望

结论

- 给出了确定收缩理想的算法
- 引入了完全奇点消尽算子并给出算法
- 序列整性判定及检验 Krattenthlater 问题的特例

展望

- Krattenthaler 问题的完全证明
- 多变元情形的收缩理想算法

结论与展望

结论

- 给出了确定收缩理想的算法
- 引入了完全奇点消尽算子并给出算法
- 序列整性判定及检验 Krattenthlater 问题的特例

展望

- Krattenthaler 问题的完全证明
- 多变元情形的收缩理想算法
- 收缩理想算法的软件实现

结论与展望

结论

- 给出了确定收缩理想的算法
- 引入了完全奇点消尽算子并给出算法
- 序列整性判定及检验 Krattenthlater 问题的特例

展望

- Krattenthaler 问题的完全证明
- 多变元情形的收缩理想算法
- 收缩理想算法的软件实现

谢谢！